DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2008.04.003
西北大学学报(自然科学版)
2008年8月,第38卷第4期, Aug., 2008, Vol.38, No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

关于 Smarandache 函数 $d_f(n)$ 的均值

张福玲[1,2], 李江华[1]

(1. 西北大学 数学系, 陕西 西安 710069; 2. 渭南师范学院 数学系, 陕西 渭南 714000)

摘要: 目的 研究一个新 Smarandache 函数 $d_f(n)$ 的均值。方法 利用初等方法和解析的方法。结果 给出了函数 $d_f(n)$ 均值的一个较强的渐近公式。结论 促进了 Smarandache 问题的研究发展。

关 键 词: Smarandache 函数; 均值; 渐近公式
中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1000-274X(2008)04-0531-02

对于任意正整数 n, 著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$, 即 $S(n) = \min\{m: m\in N, n \mid m!\}$。由 $S(n)$ 的定义可得到除了 $n=4$, $n=1$ 的情况, 一般有 $S(p)=p$ 和 $S(n)<n$。关于 $S(n)$ 的算术性质, 有不少学者进行过研究, 并且获得了很多有重要理论价值的研究成果[1-6]。例如文献[2]中指出, 假设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则有 $S(n) \geq P(n)$。现在我们定义另一个 F. Smarandache 函数 $d_f(n)$ 如下: $d_f(n)$ 表示最小的正整数 m 使得 $n \mid m!!$, 即为 $d_f(n) = \min\{m: m\in N, n \mid m!!\}$。关于这个函数的初等性质, 我们目前知道得很少。在文献[1]中, Kenichiro Kashihara 介绍了这一函数, 同时建议我们研究关于函数 $S(n)$ 与 $d_f(n)$ 之间的关系。由这两个函数的定义不难推出

$$d_f(n)! \geq S(n) > (d_f(n)-1)!,$$

所以有

$$d_f(n) = \min\{m: m! \geq S(n)!\}。$$

显然, 这是函数 $S(n)$ 与 $d_f(n)$ 之间的一个简单关系。

本文的主要目的是利用初等及解析方法研究函数 $d_f(n)$ 的均值性质, 并给出一个较强的渐近公式。具体的说也就是证明下面的定理。

定 理 设 n 为任意的正整数, 则对任意的实数 $x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} d_f(n) = \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

根据定函数 $S(n)$ 的性质及 $d_f(n)$ 的定义, 有

$$d_f(n)! \geq S(n) \geq (d_f(n)-1)!,$$

对该式两边取对数可得

$$\sum_{i\leq d_f(n)} \ln i \geq \ln S(n) \geq \sum_{i\leq d_f(n)-1} \ln i。$$

由 Euler 求和公式[3], 有

$$\sum_{i\leq d_f(n)} \ln i = m\ln m - m + O(\ln m),$$

$$\sum_{i\leq d_f(n)-1} \ln i = m\ln m - m + O(\ln m),$$

于是

$$m\ln m - m + O(\ln m) \geq \ln S(n) \geq m\ln m - m + O(\ln m),$$

所以

$$\ln S(n) = m\ln m - m + O(\ln m), \tag{1}$$

即

$$m = \frac{\ln S(n)}{\ln m - 1} + O(1)。$$

由式(1)还可得 $\ln m \sim \ln\ln S(n)$, 那么

$$m = \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n) - 1} + O(1) = \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} + O\left(\frac{\ln S(n)}{\ln^2\ln S(n)}\right)。 \tag{2}$$

因为 $m = d_f(n)$, 所以由式(2)可得

$$\sum_{n\leq x} d_f(n) = \sum_{n\leq x} \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} + O\left(\sum_{n\leq x} \frac{\ln S(n)}{\ln^2\ln S(n)}\right),$$

而

$$\sum_{n\leq x} \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} \leq \sum_{n\leq x} \frac{\ln n}{\ln\ln n}$$

则有

收稿日期: 2008-04-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介: 张福玲(1970-), 女, 陕西渭南人, 西北大学硕士生, 渭南师范学院讲师, 从事数论研究。

$$\sum_{n\le x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}\le\sum_{n\le x}\frac{\ln n}{\ln\ln n}=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)\le\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{\ln^2\ln x}\right)。\quad(3)$$

对任意正整数 n,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的素幂分解。将所有的 $1\le n\le x$ 的正整数 n 分为两个子集合 A 和 B,其中集合 A 包含区间 $[1,x]$ 中所有满足 $\alpha_i\ge 2$ 的正整数 n $(i=1,2,\cdots,k)$,而集合 B 包含区间 $[1,x]$ 中所有不属于集合 A 的那些正整数,那么

$$\sum_{n\le x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)},\quad(4)$$

由函数 $S(n)$ 的性质可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}\ll\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\frac{\ln x}{\ln\ln x}\ll\frac{\ln x}{\ln\ln x}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}1\ll\frac{\sqrt{x}\ln x}{\ln\ln x}\ll O\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)。\quad(5)$$

此外,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}=\sum_{\substack{np\le x\\ (n,p)=1}}\frac{\ln S(np)}{\ln\ln S(np)}>\sum_{\substack{np\le x\\ (n,p)=1}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}=\sum_{n\le x}\sum_{p\le\frac{x}{n}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}=x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right)=x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right),\quad(6)$$

由 Abel's 恒等式可得

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{\ln x}{\ln^2\ln x}\right)\quad(7)$$

及

$$\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\ll\frac{\ln x}{\ln\ln x}。\quad(8)$$

于是结合式(3)~(8),立刻得到

$$\sum_{n\le x}d_f(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)。$$

于是,完成了定理的证明。

致谢:作者对导师张文鹏教授的悉心指导表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] KASHIHARA K. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[2] CHEN Guo-hui. Some exact calculating formulas for the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(2): 95-97.

[3] 陈国慧. Smarandache问题新进展[M]. Ann Arbor: High America Press, 2007.

[4] ZHU Wei-yi. The relationship between $S_p(n)$ and $S_p(n)$[J]. Scientia Magna, 2006, 2(2): 145-149.

[5] ASHBACHER C. Some properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff functions[J]. Mathematics and Informatics Quarterly, 1997, 7: 114-116.

[6] BEGAY A. Smarandache ceil functions[J]. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 1997, 16E: 227-229.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

(编 辑 亢小玉)

On the mean value of smarandache function $d_f(n)$

ZHANG Fu-ling[2], LI Jiang-hua

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China)

Abstract: Aim To study the mean value properties of the Smarandache function $d_f(n)$. Methods Using the elementary and analytic methods. Results A sharper mean value formula of the Smarandache function $d_f(n)$ is given. Conclusion Properties of the Smarandache function developed.

Key words: Smarandache function; mean value; asymptotic formula